تعاريف أساسية في جبر وتحليل المتجهات

1 تساوي المتجهات :

نقول إن المتجهين **B** و **A** متساويان إذا كان لهما نفس الطول والاتجاه، ونكتب:

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}$$

عندئذ يكون :

$$A_z = B_z \quad , \quad A_y = B_y \quad , \quad A_x = B_x$$

2 جمع وطرح المتجهات:

نجمع أو نطرح المتجهين **A** و **B** بالشكل:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \pm \mathbf{B} = (A_x \pm B_x)\mathbf{i} + (A_y \pm B_y)\mathbf{j} + (A_z \pm B_z)\mathbf{k} \qquad (1)$$

حيث **i** و **j** و **k** متجهات وحدة على المحاور ox، و oy ، و oz ، على الترتيب.

3 ضرب متجه بعدد:

حاصل ضرب متجه **A** بعدد n هو متجه جديد طوله $n\,\mathbf{A}$ ، اتجاهه باتجاه **A** إذا كان n موجباً، أو بعكس **A** إذا كان n سالباً، ونكتب:

$$n\mathbf{A} = (nA_x, nA_y, nA_z)$$

4 ضرب متجه بمتجه : الضرب العددي (Scalar Product):

نعرف الضرب العددي لمتجهين **A** و **B** بالعلاقة :

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = c = AB\cos\theta_{AB} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \qquad (2)$$

حيث ترمز Θ_{AB} للزاوية بين **A** و **B** ، بينما c عدد قيمته هي حاصل ضرب **A** بـ **B** .

نستفيد من هذا التعريف لإيجاد طول متجه فنكتب:

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{A} = A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

أي أن :

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

5 ضرب متجه بمتجه: الضرب المتجه (التقاطعي) (Vector Product)

نعرف الضرب المتجه لمتجهين **A** و **B** بالعلاقة:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \mathbf{C} \qquad (3)$$

حيث **i** و **j** و **k** متجهات وحدة على المحاور ox و oy و oz ، على الترتيب و **C** متجه يُعطى طوله بالعلاقة:

$$C = AB\sin\theta_{AB}$$

حيث θ_{AB} الزاوية بين **A** و **B** .

6 الضرب الثلاثي العددي والمتجه (Triple Product):

نطلق على $\mathbf{A}\bullet(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ اسم الضرب الثلاثي (أو المختلط) العددي للمتجهات $\mathbf{A}$ و$\mathbf{B}$و$\mathbf{C}$، تعطي نتيجته بالمعين (أو المحدد) *(Determinent)* التالي:

$$\mathbf{A}\bullet(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \qquad (4)$$

يمكن البرهان بسهولة أن:

$$\mathbf{A}\bullet(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\bullet\mathbf{C} \qquad (5)$$

من جهة أخرى، نطلق على $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ اسم الضرب الثلاثي المتجه للمتجهات $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ و $\mathbf{C}$.
يمكن البرهان بسهولة أن:

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}(\mathbf{A}\bullet\mathbf{C})-\mathbf{C}(\mathbf{A}\bullet\mathbf{B}) \qquad (6)$$

اشتقاق المتجهات *(Vector Differentiation)* :

إذا كان المتجه **A** معطى بالعلاقة:

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$$

عندئذ نكتب مشتقه بالنسبة لمنظومة المحاور *oxyz* (أي معدل تغيره بدلالة الزمن بالنسبة لمراقب موجود في هذه المنظومة) بالشكل :

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{dA_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dA_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dA_z}{dt}\mathbf{k} \qquad (7)$$

بفرض أن متجهات الوحدة **i** و **j** و **k** تبقى ثابتة بالنسبة لمنظومة المحاور *oxyz* .

أما إذا كتبنا **A** بدلالة متجهات وحدة $\mathbf{e}_1$ و $\mathbf{e}_2$ و $\mathbf{e}_3$ متغيرة الاتجاه بالنسبة لمنظومة المحاور *oxyz*، عندئذ يكون :

$$\mathbf{A} = A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3 \qquad (8)$$

و

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{dA_1}{dt}\mathbf{e}_1 + \frac{dA_2}{dt}\mathbf{e}_2 + \frac{dA_3}{dt}\mathbf{e}_3 + (A_1\frac{d\mathbf{e}_1}{dt} + A_2\frac{d\mathbf{e}_2}{dt} A_3\frac{d\mathbf{e}_3}{dt}) \qquad (9)$$

للعلاقة (9) أهمية كبيرة في حالة دراسة حركة جسيم بالنسبة لمنظومة محاور متحركة، مثل حركة جسم على سطح الأرض التي تدور حول الشمس.

الاحداثيات الديكارتية (cartesian coordinats):

لنفترض أن لدينا جسيما m محدداً بالمتجه $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ بالنسبة لمنظومة محاور إحداثية ثابتة $oxyz$، عندئذ نكتب متجه سرعة الجسيم بدلالة $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ بالشكل:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} \quad (10)$$

ونكتب تسارعه بالشكل :

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt}\mathbf{k} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} \quad (11)$$

أو :

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} \quad (12)$$

مؤثر التدرج (gradient operator) :

نعرف **تدرج** (gradient) أيّ دالة عددية $u = u(x,y,z)$ بالإحداثيات الديكارتية بالعلاقة:

$$du = d\mathbf{r} \bullet \nabla u \quad (13)$$

حيث نضع :

$$d\mathbf{r} = (dx)\mathbf{i} + (dy)\mathbf{j} + (dz)\mathbf{k} \quad (14)$$

ونعرّف تدرج الدالة العددية u بالعلاقة :

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\mathbf{k} \quad (15)$$

يُسمى ∇ **مؤثر التدرج** *(gradient operator)* ويعطى بـ:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{k} \tag{16}$$

نلاحظ أن (15-2) تنتج من تطبيق المؤثر ∇ على الدالة العددية u.

2 - 3 -3 دوّار متجه *(curl of a vector)* :

نعرف **دوّار** *(curl)* متجه $\mathbf{A}$ بالعلاقة :

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \tag{17}$$

حيث يدل الرمز $\partial/\partial x$ مثلاً على الاشتقاق الجزئي بالنسبة للمتحول x.

نلاحظ أننا نحصل على دوّار متجه بضربه بشكل متجه بمؤثر التدرج ∇. سنرى كيف نستفيد من تدرج دالة ودوّار متجه عند حساب الشغل والعزم وغيرها من الكميات الفيزيائية.

الكتلة *(mass)*

عندما نتكلم عن أجسام مادية فإننا نصفها بخواص معينة، فنقول إن الجسم صغير أو كبير، مشحون أو غير مشحون، ممغنط أو غير ممغنط، وغير ذلك. وتتميز كل خاصة من هذه الخواص بالتأثير الناتج عنها على الأجسام الأخرى. وسنعرف في هذه الفقرة خاصية الكتلة حيث اعتاد البعض تعريفها بمقدار مايحويه الجسم من مادة. إلا أن هذا التعريف لايفسر مانعنيه بكلمة كتلة إذ أن المادة المحتواة في جسم مؤلفة من كتلة، أي أننا نعرف الكتلة بالكتلة! لذا نلجأ لتعريف الكتلة بطريقة مختلفة. فإذا طلبنا من شخص أن يتأكد فيما إذا كان لجسم ما كتلة فإنه يقوم بوزنه لكن وزن الجسم لايظهر لولا وجود الأرض (كتلة أخرى) تجذبه للأسفل فيظهر تأثيرها عليه بما نسميه قوة الثقل أو الوزن. فلمعرفة فيما إذا كان لجسم كتلة احتجنا لكتلة أخرى لتحسس التأثير المتبادل بينهما، ولو اختفت كتلة واحد منهما لاختفى هذا التأثير مباشرة. لذا نعطي للكتلة **تعريفا تأثيريا** *(operational definition)* فنقول إن للجسم كتلة إذا استطاع أن يؤثر على غيره من الكتل بقوة التجاذب الكتلي. والتعريف السابق ينطبق على أي خاصة طبيعية أودعها الله عز وجل في المواد، كالكتلة والشحنة والفتل والخواص الأخرى التي توصف بها الأجسام الأولية. فإن كان لجسم خاصة ما عندئذ يؤثر على أجسام تحوي تلك الخاصة فقط. فالكتل تؤثر على بعضها بقوة الجاذبية، والشحنات تؤثر على بعضها بقوة كولوم الكهربائية، وهكذا. لكن خاصية الكتلة لاعلاقة لها بخاصية الشحنة بمعنى أن جسما مشحونا لايؤثر على آخر غير مشحون بقوة تجاذب أو تنافر كهربائي، كما أن جسما له كتلة لايؤثر بقوة تجاذب كتلي على آخر عديم الكتلة.

وتكون كتلة جسم كبيرة بالمقارنة مع غيره من الأجسام إذا كان تأثيره عليها أوضح من تأثره بها، أي إذا كان تسارعها نتيجة تأثرها به أكبر من تسارعه نتيجة تأثيرها عليه. ومن أفضل الأمثلة على ذلك قوة التجاذب بين الأرض وكرة تطير في الهواء إذ أن لكل واحدة منهما كتلة وتؤثر على الأخرى بقوة الجاذبية لكن الكرة تكتسب تسارعا أكبر لأن كتلتها أصغر بينما تبقى الأرض ساكنة تقريبا لأن كتلتها كبيرة جدا بالمقارنة مع الكرة. أما لو تابعنا حركة الأرض بالنسبة للشمس لوجدنا أن الأرض هي التي تتحرك في هذه الحالة لأن الشمس أكبر منها بكثير.

وتقدر الكتلة في النظام الدولي للوحدات بالكيلوغرام kg، كما نعلم.

القوة *(force)*

إن تعريف القوة ليس صعبا للغاية، فشد صندوق بواسطة حبل، أو دفع سيارة معطلة، أو رفع أثقال، ماهي إلا أمثلة على بعض القوى التي نطبقها أو نشعر بها يوميا. ونلاحظ أن كل قوة من هذه القوى تحرك الجسم الذي تؤثر عليه إن كان ساكنا، أو تغير سرعته إن كان متحركا. **فالقوة هي مؤثر يغير الحالة التحركية للجسم وينتج عنها تسارع يغير قيمة و/أو اتجاه سرعة الجسم.**

ويرمز للقوة عادة بـ . **F** وتقدر وحدتها في النظام الدولي بالنيوتن N، وهي مشتقة من الوحدات الأساس بحيث أن:

$$1\ N = 1\ kg.m/s^2$$

ويمكن "تحسس" قيمة النيوتن لو حملنا بيدنا 100 غرام عندئذ يكون الثقل الذي نشعر به مساويا لواحد نيوتن تقريبا. فوحدة النيوتن ليست كبيرة بالمقارنة مع الأثقال التي نتعامل معها يوميا.

وتتميز بعض القوى أنه يمكن تطبيقها مباشرة على الأجسام الخاضعة لها، كأن نشد جسما موضوعا على الأرض بحبل، أو نضغط زنبركا مثبتا بالحائط. وتسمى هذه القوى **قوى اتصال** *(contact force)*، أي أن هناك تلامس مباشر بين مصدر القوة والجسم الخاضع لها. لكن هناك قوى تؤثر عن بعد كقوة الجاذبية التي تؤثر بها الأرض على الأجسام القريبة منها، أو قوى التجاذب والتنافر الكهربائي بين الأجسام المشحونة، حيث لايوجد تماس مباشر بين مصدر القوة والجسم الخاضع لها، لذا تسمى هذه القوى **قوى تأثير عن بعد** *(action at a distance)*.

ولايوجد فرق بين هذين النوعين من القوى لأنه لو تمعنا بماهية قوى الاتصال لتبين لنا أنها قوى تأثير عن بعد بين الذرات والجزيئات المكونة لمادة الاتصال. انظر الشكل :

قانون نيوتن الأول *(Newton's First Law)*

من المعروف أنه إذا دفع جسم على الأرض فإنه ينزلق عليها مسافة معينة ثم يتباطأ إلى أن يقف. وقد اعتقد القدماء أن سبب ذلك يعود إلى أن طبيعة المادة هي السكون، بمعنى أن حركة أي شي تؤول للسكون. إلا أن التجارب العلمية أظهرت أن ذلك يعود لوجود قوى مقاومة لحركة الجسم المنزلق تعمل على إبطائه حتى يقف، ولو لم تكن موجودة لتابع سيره باستمرار. يطلق على ماتقدم اسم **قانون نيوتن الأول** الذي نصيغه بالشكل: **يبقى أي جسم على حالته التحركية من سكون أو سرعة ثابتة (قيمة واتجاها) مالم تؤثر عليه محصلة قوى خارجية غير معدومة** ونكتب هذا القانون بالشكل:

$$\boxed{\mathbf{F}_T = 0 \ \Rightarrow\ \mathbf{v} = \text{constant} \ \Rightarrow\ \mathbf{a} = 0}$$

حيث $\mathbf{F}_T$ محصلة القوى المؤثرة على الجسم و$\mathbf{v}$ و $\mathbf{a}$ متجهي سرعته وتسارعه، على الترتيب. ونلاحظ من العلاقة السابقة أن كون التسارع مساويا للصفر يعني أن سرعة الجسم ستبقى ثابتة وهذا يسمى اتزانا *(equilibrium)*. فإن كانت سرعته مساوية للصفر، أي كان ساكنا ومحصلة القوى عليه تساوي الصفر، فسيبقى كذلك ونقول إنه متزن سكونيا *(static equilibrium)*. أما إن كان الجسم يتحرك بسرعة ما ومحصلة القوى عليه معدومة فسيبقى متحركا بنفس السرعة ونفس الاتجاه ونقول إنه في حالة اتزان حركي *(static equilibrium)*. ولذلك نطلق على التسارع (أي تغير السرعة) اسم دليل التحريك بينما نسمي القوة سبب التحريك.

ونستنتج عندئذ من قانون نيوتن الأول أنه **إذا لم يكن هناك سبب للتحريك ($\mathbf{F}_T$=0) فسيختفي دليله (a=0)**. ولابأس من التنويه إلى أن العلاقة (1) ليست قانونا يربط بين متغيرات مختلفة بل هي تعريف للقوة كمسبب لتحريك الجسم. ويستفاد من قانون نيوتن الأول لدراسة الاتزان السكوني للأجسام، كما في المثل التالي.